[問題1]　f を区間 $[0,1]$ 上の正値連続関数とする. 次を示せ.

(1) $t \to +0$ のとき、

$$\frac{f(x)^t - 1 - t\log f(x)}{t}$$

は $[0,1]$ 上、零に一様収束する。

(2) $\lim_{t \to +0} \left(\int_0^1 (f(x))^t dx\right)^{\frac{1}{t}} = \exp\left(\int_0^1 \log f(x)dx\right).$　（東工大）

[解答]　(1)　$$\frac{f(x)^t - 1 - t\log f(x)}{t} = \frac{e^{t\log f(x)} - 1}{t\log f(x)}\log f(x) - \log f(x)$$

と変形する. $f(x)$ は閉区間 $[0,1]$ において連続だから

ある定数Mが存在して、$|\log f(x)| \leqq$ Mとなる.

従って、

$$\left|\frac{f(x)^t - 1 - t\log f(x)}{t}\right| = |\log f(x)|\left|\frac{e^{t\log f(x)} - 1}{t\log f(x)} - 1\right|$$

$$\leqq \mathrm{M}\left|\frac{e^{t\log f(x)} - 1}{t\log f(x)} - 1\right|$$

が成り立つ.

ここで任意に正数 ε を選ぶと、$x \in [0,1]$ である限り

$$|t\log f(x)| \leqq \mathrm{M}|t|$$

であるから、このεに対して正数δを、xに無関係に

$0 < t < \dfrac{\delta}{\mathrm{M}}$となる様に選び取れば、

$$|t\log f(x)| \leqq \mathrm{M}|t| < \delta \Rightarrow \left|\frac{e^{t\log f(x)}-1}{t\log f(x)}-1\right| < \frac{\varepsilon}{\mathrm{M}}$$

が成り立つ.

従って、$\forall\varepsilon > 0$に対して正数δが存在して、$0 < t < \dfrac{\delta}{\mathrm{M}}$

を満たす全ての実数tと$\forall x \in [0,1]$に対して

$$\left|\frac{f(x)^t - 1 - t\log f(x)}{t}\right| < \varepsilon$$

が成り立つから、与えられた関数は$t \to +0$のとき$[0,1]$上、

零に一様収束する.

(2)　(1)において、十分小さな正数εを任意に取り、

このεに対して正数δを

$$0 < t < \delta \Rightarrow \left|\frac{f(x)^t - 1 - t\log f(x)}{t}\right| < \varepsilon \ (\forall x \in [0,1])$$

が成り立つ様にとっておく.

以下では$0 < t < \delta$、$\forall x \in [0,1]$であるとする.

$$-\varepsilon < \frac{f(x)^t - 1 - t\log f(x)}{t} < \varepsilon$$

であるから、

$$1 + t\log f(x) - \varepsilon t < f(x)^t < 1 + t\log f(x) + \varepsilon t$$

が成り立つので、xについて0から1まで積分して、

$$\int_0^1 (1 + t\log f(x) - \varepsilon t)dx < \int_0^1 f(x)^t dx < \int_0^1 (1 + t\log f(x) + \varepsilon t)dx$$

という不等式を得る．この不等式において

$$(\text{左辺}) = 1 + t\int_0^1 \log f(x)dx - \varepsilon t \text{、} (\text{右辺}) = 1 + t\int_0^1 \log f(x)dx + \varepsilon t$$

だから、$(\text{左辺}) > 0$となる様にさらに正数δを小さく取り直して、不等式

$$\left(1 + t\int_0^1 \log f(x)dx - \varepsilon t\right)^{\frac{1}{t}} < \left(\int_0^1 f(x)^t dx\right)^{\frac{1}{t}} < \left(1 + t\int_0^1 \log f(x)dx + \varepsilon t\right)^{\frac{1}{t}}$$

を得る．左辺と右辺の極限をとると、

$$\lim_{t \to +0} \left\{1 + \left(\int_0^1 \log f(x)dx - \varepsilon\right)t\right\}^{\frac{1}{t}} = \exp\left(\int_0^1 \log f(x)dx - \varepsilon\right)$$

$$\lim_{t \to +0} \left\{1 + \left(\int_0^1 \log f(x)dx + \varepsilon\right)t\right\}^{\frac{1}{t}} = \exp\left(\int_0^1 \log f(x)dx + \varepsilon\right).$$

εは任意なので $\lim_{t \to +0} \left(\int_0^1 f(x)^t dx\right)^{\frac{1}{t}} = \exp\left(\int_0^1 \log f(x)dx\right).$