[問題2]　Vを有限次元の実ベクトル空間とし、$f:V \to V$を

$f \circ f = f$を満たす線形写像とする。次の問いに答えよ.

(1)　fを部分空間$\mathrm{Im}(f)$に制限したものは$\mathrm{Im}(f)$の恒等写像であることを示せ.

(2)　Vの任意の元は、$\mathrm{K}er(f)$と$\mathrm{Im}(f)$の元の和として表されることを示せ.

(3)　$\mathrm{K}er(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$であることを示せ.　(埼玉大)

[解答](1)　$\forall x \in \mathrm{Im}(f)$をとると、$u \in V$が存在して、$x = f(u)$と表すことができる. $f \circ f = f$であるから、xにfを施すと、

$$f(x) = f(f(u)) = (f \circ f)(u) = f(u)$$

となる. 従って、fを$\mathrm{Im}(f)$に制限したとき、$\forall x \in \mathrm{Im}(f)$は$f(x) = x$を満たすから、$f$は$\mathrm{Im}(f)$の恒等写像である.

(2)　$\forall x \in V$をとると、

$$x = f(x) + \{x - f(x)\}$$

と表すことができる. $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$であり、$x - f(x)$については

$$
\begin{aligned}
f(x-f(x)) &= f(x)-f(f(x)) \\
&= f(x)-f(x) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となるから、$x-f(x)\in \mathrm{Ker}(f)$である．これらのこと

から

$$x\in \mathrm{Im}(f)+\mathrm{Ker}(f)$$

がいえるから、題意は示された．

(3)　$\forall a\in \mathrm{Ker}(f)\cap \mathrm{Im}(f)$をとる．$a\in \mathrm{Im}(f)$であるから、

$b\in V$が存在して、$a=f(b)$と表される一方で、$a\in \mathrm{Ker}(f)$

であるから$f(a)=0$となる．ところが

$$f(a)=f(f(b))=f(b)$$

となるので

$$f(b)=0 \quad \text{つまり} \quad a=0$$

がいえるから

$$\mathrm{Ker}(f)\cap \mathrm{Im}(f)=\{0\}$$

となる．