

[問題1] 複素関数 $f(z) = \frac{1}{\sin(4z)}$ について次の問いに答えよ。

(i) $f(z)$ の全ての極, およびそこでの留数を求めよ。

(ii) 複素線積分 $\int_{|z|=1} f(z) dz$ を求めよ。

[問題2] $0 < a < 1$ なる実数 a に対して, 広義積分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx$$

を考える。次の設問に答えよ。

(i) 複素平面上の直線 $C = \{x + 2\pi i \mid x \in \mathbb{R}\}$ に対して, 線積分

$$J = \int_C \frac{e^{az}}{1+e^z} dz$$

を I を用いて表せ。ただし, C の向きは x の増大する方向とする。

(ii) I の値を求めよ。

[問題3] 次の積分を求めよ。

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2 + \lambda} dx \quad (0 \neq \lambda \in \mathbb{R})$$

ただし, 被積分関数 $f(x)$ がある点 $a \in (0, \infty)$ を特異点とし

a 以外で連続である場合は, $\int_0^{\infty} f(x) dx$ は主値積分

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{a-\varepsilon} f(x) dx + \int_{a+\varepsilon}^{\infty} f(x) dx \right)$$

をとるものとする。