[問題1]次の極限の値を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty}\left\{a\left(a+\frac{1}{n}\right)\left(a+\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(a+\frac{n-1}{n}\right)\right\}^{\frac{1}{na}}$$

[問題2] t の関数 $f(t)$ を $f(t)=1+2at+b(2t^2-1)$ とおく．区間 $-1\leqq t\leqq 1$ のすべての t に対して $f(t)\geqq 0$ であるような a、b を座標とする点 (a,b) の存在する範囲を図示せよ.

[問題3] a は 1 より大きい実数とする．方程式 $\sin ax=\sin x$ の $x>0$ における最小の解を θ とおく.

(1) θ を a を用いて表せ.

(2) $0\leqq x\leqq\theta$ の範囲で 2 曲線 $y=\sin ax$、$y=\sin x$ によって囲まれた図形の面積 $S(a)$ を求めよ.

(3) $\lim_{a\to\infty}(a+1)S(a)$ を求めよ.

[問題4]

(1) $\dfrac{z+1}{z^2}$ が実数となるような複素数 z は、複素平面上でどんな図形を描くか.

(2)　z が(1)で求めた図形上にあって、かつ $|z| \leqq 2$ であるとき $|z-1+i|$ の最大値と最小値を求めよ.

[問題5]次のことを証明せよ.

(1) p が正の整数のとき $p^3+(p+1)^3+(p+2)^3$ は 9 の倍数である.

(2) $p>3$ で、p と $p+2$ がともに素数のとき、$p+1$ は 6 の倍数である.

[問題6]あるゲームをするとき、A君の勝つ確率は $\frac{2}{3}$ であるという.

(1) A君が 1 回勝つまでゲームを続け、勝ったらそこでゲームを終わることにする. このとき、ゲームが n 回以下で終わる確率を n で表せ.

(2) A君が 2 回勝つまでゲームを続け、2 回目の勝ちゲームでゲームを終わることにする. このときゲームが n 回以下で終わる確率を n で表せ. ただし、$n \geqq 2$ とする.